DE

INVENTIONE PROPRIETATIBUSQUE
TRIUM CURVARUM MECHANICARUM.

COMMENTATIO MATHEMATICA

QUAM

CONSENSU ET AUCTORITATE

ORDINIS AMPLISSIMI PHILOSOPHORUM

IN

ALMA ACADEMIA REGIA MONASTERIENSI

UT

SUMMI IN PHILOSOPHIA HONORES

RITE SIBI CONCEDANTUR

CAL. MART. A. MDCCCLIII

PUBLICE DEFENDET

SCRIPTOR

ANTONIUS JOSEPHUS TEMME

WARBURGENSIS GUESTPHALUS.

Münster.

MONASTERII GUESTPHALORUM

EX TYPOGRAPHIA FRIDERICI REGENSBERG.

MDCCCLIII.

MANIBUS

ILLUSTRISSIMI HUMANISSIMI

CHRISTOPHORI GUDERMANNI

PHILOSOPHIAE DOCTORIS MATHESEOS IN ACADEMIA MONASTERIENSI PROFESSORIS PUBLICI ORDINARII

PRAECEPTORIS HONORATISSIMI

HOC OPUSCULUM

PIO GRATOQUE ANIMO

CONSECRATUM ESSE

VOLUIT

SCRIPTOR.

Proœmium.

Christophorus Gndermannus, vir clarissimus et doctissimus, in scholis, quas habebat de mechanica sublimiore, quibusque ipse interfui, æquationem eruere docuit inter coordinatas polares (φ et r) ita comparatam, ut in ea continerentur multarum æquationes curvarum. In æquatione enim illa generali quantitas quædam inest arbitraria, quæ quidem vim significat centralem aut *attractivam* aut *repulsivam* ut functionem radii vectoris. Singularum autem curvarum æquationes evadunt, si pro vi centrali aliæ atque aliæ functiones radii vectoris in æquatione generali substituuntur.

Quum igitur ipse iam Gudermannus me monuisset, ut in peculiari quodam casu tractando vires atque ingenium exercerem, eum potissimum casum mihi eligendum esse putavi, in quo vis centralis attractiva ita est comparata, ut *reciproce proportionalis sit radii vectoris potentiæ quarti gradus.* Erutis autem æquationibus curvarum, in quibus punctum mobile vi centrali ita comparata moveri potest, investigabimus illarum, quoad fieri potest naturam curvarum proprietatesque præcipuas geometricas.

Quoniam vero plurium fortasse intererit, æquationis illius generalis novisse deductionem, natura motuum centralium, ut omnia sine magno labore intelligi possint, breviter exposita, duo solvemus problemata, quorum alterum inversio est alterius.

Primum enim hoc est problema:

> «*Si data est curva et locus, quem obtinet vis quædam centralis variabilis, invenienda est lex, quam sequitur ista vis centralis.*»

Alterum autem problema est hoc:

> «*Si data est lex, quam sequitur vis quædam centralis variabilis, et locus, quem obtinet ista vis, investiganda est natura curvæ, in qua movetur punctum mobile.*»

Pars prima.

De motibus centralibus in universum.

Sectio I.

De natura motuum centralium.

Punctum V (fig. 1) sit initium abscissarum; VX axis abscissarum, VY axis applicatarum. Tum sunt VP = — x et PM = y coordinatæ orthogonales puncti M, quod in curva quadam influentibus duabus accelerationibus parallelis ad axes, Mq = X et Mp = Y motum est. A puncto V ductus sit radius vector VM = r; disponatur acceleratio utraque in duas accelerationes laterales, quarum una habeat directionem radii vectoris, altera directionem in radio vectore normalem.

Si φ est angulus variabilis, quem radius vector facit cum prima sua directione VX, tum est

$$\cos\varphi = -\frac{x}{r};\ \sin\varphi = \frac{y}{r}.$$

Sit autem R acceleratio, quæ valet in directione radii vectoris et *K* ea acceleratio, quæ valet in directione in radio vectore normali.

Est $M\alpha = Y \,.\, \sin\varphi = Y \,.\, \frac{y}{r};\qquad M\alpha' = X \,.\, \cos\varphi = -X \,.\, \frac{x}{r};$

$$M\beta = Y \,.\, \cos\varphi = -Y \,.\, \frac{x}{r};\ \ M\beta' = X \,.\, \sin\varphi = X \,.\, \frac{y}{r}.$$

Acceleratio R componenda est ex accelerationibus $M\alpha$ et $M\alpha'$. Hæ autem accelerationes sibi oppositæ sunt. Esse igitur potest:

$$R = M\alpha - M\alpha';\ \text{et}\ R = M\alpha' - M\alpha.$$

Ergo quæritur, quando sit $R = M\alpha - M\alpha'$ et quando sit $R = M\alpha' - M\alpha$; sive quando sit $M\alpha > M\alpha'$ et quando $M\alpha' > M\alpha$.

Si ponimus $M\alpha > M\alpha'$, tum necesse est, ut moveatur punctum M in curva *convexa* ad punctum V; si vero ponimus $M\alpha' > M\alpha$, tum moveatur necesse est punctum in curva *concava* ad punctum V.

Substituamus igitur in formulis illis pro R valores pro accelerationibus $M\alpha$ et $M\alpha'$; tum sequitur ex priore illarum formularum:

$$R = \frac{Y \,.\, y + X \,.\, x}{r};\ \text{ex altera autem}$$

$$R = -\frac{Y \,.\, y + X \,.\, x}{r}.$$

Hoc ita esse debet; signum enim negationis significat, accelerationem vim esse attractivam in eo casu, in quo $M\alpha' > Ma$. In universum igitur est

$$R = \pm \frac{Y \cdot y + X \cdot x}{r}.$$

Signo affirmationis utendum est, si R vis est *repulsiva;* signo negationis, si R vis est *attractiva.*

Quum igitur signum $\pm$, ut ita dicam, munere suo functum sit, dimittere illud licet et scribere

$$R = \frac{Y \cdot y + X \cdot x}{r}.$$

Jam transeamus ad accelerationem *K*. Est

$$K = M\beta + M\beta';$$

ergo substitutis pro $M\beta$ et $M\beta'$ valoribus est

$$K = \frac{X \cdot y - Y \cdot x}{r}.$$

Est autem acceleratio secundus coefficiens differentialis ductus ex æquatione inter spatium et tempus. Ideo est $X = \frac{d^2x}{dt^2}$ et $Y = \frac{d^2y}{dt^2}$.

Quos valores si substituerimus in formula pro R, tum erit

$$R = \frac{y \cdot d^2y + x \cdot d^2x}{r \cdot dt^2}.$$

Est autem $r^2 = x^2 + y^2$,

unde, si ς significat arcum curvæ, duplici differentiatione sequitur

$$r \cdot d^2r + dr^2 = x \cdot d^2x + y \cdot d^2y + d\varsigma^2.$$

Ergo est $R = \frac{r \cdot d^2r + dr^2 - d\varsigma^2}{r \cdot dt^2}$.

Est autem $d\varsigma^2 = dr^2 + r^2 \cdot d\varphi^2$; ergo

$$R = \frac{d^2r}{dt^2} - \frac{\left(\frac{r \cdot d\varphi}{dt}\right)^2}{r}.$$

Jam transformemus etiam formulam pro *K* simili ratione; tum evadit

$$K = \frac{y \cdot d^2x - x \cdot d^2y}{r \cdot dt^2}.$$

Est autem $d\,(y \cdot dx - x \cdot dy) = y \cdot d^2x - x \cdot d^2y$; ergo etiam

$$K = \frac{d\,\frac{y \cdot dx - x \cdot dy}{dt}}{r \cdot dt}.$$

Est autem $y \cdot dx - x \cdot dy = 2 \cdot d\sigma$, si σ significat aream sectoris.

Ergo sequitur $K = \frac{2 \cdot d\,\frac{d\sigma}{dt}}{r \cdot dt}$.

Sicut $\frac{ds}{dt}$ est celeritas curvæ, ita $\frac{d\sigma}{dt}$ nominatur celeritas arealis.

Jam in eo res est, ut definiamus, quinam sint motus centrales.

Motus centrales sunt ii, in quibus acceleratio, quæ valet in directione normali in radio vectore, nulla est, in quibus igitur valet tantum variabilis quædam vis centralis aut *attractiva* aut *repulsiva* et alia quædam vis, quæ efficit, ut punctum mobile moveri incipiat, quæ igitur puncto mobili celeritatem quandam initialem tribuit.

Jam igitur ponimus $K = 0$; tum est etiam $d\,\frac{d\sigma}{dt} = 0$; ideoque $\frac{d\sigma}{dt} =$ const. i. e in motibus centralibus celeritas arealis invariabilis est.

Ponamus igitur $\frac{d\sigma}{dt} = \frac{c}{2}$; tum est $\sigma = \frac{c \,.\, t}{2}$.

Hæc æquatio unam de legibus Keplerianis significat. Docet enim, in motibus centralibus areas a radio vectore descriptas tempori esse proportionales. Hæc autem lex, qualis hoc loco eruta est, multo latius patet, quia ad omnes pertinet motus centrales, leges autem Keplerianæ accommodatæ sunt tantum motibus corporum cœlestium, nimirum iis, qui fiunt in sectionibus conicis.

Jam transeundum est ad solvenda duo illa problemata, quæ supra proposuimus.

Sectio II.

Problema: *Data sunt curva et locus, quem obtinet vis quædam centralis variabilis; invenienda est lex, quam sequitur ista vis centralis.*

Hoc problema ita solvendum est, ut eruatur formula pro vi centrali ita quidem comparata, ut cuiuslibet curvæ æquationem ad eam referre liceat.

Vim centralem ponimus in vertice anguli variabilis.

Jam eruimus p. 3 formulam pro vi centrali:

$$R = \frac{d^2r}{dt^2} - r \,.\, \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2.$$

Est autem $d\sigma = \frac{c}{2} \,.\, dt$; sive $\frac{r^2}{2} \,.\, d\varphi = \frac{c}{2} \,.\, dt$; sive $\frac{d\varphi}{dt} = \frac{c}{r^2}$.

Si differentiamus æquationem $r^2 \,.\, d\varphi = c \,.\, dt$ ita quidem, ut sit t quantitas independenter variabilis, tum est $r \,.\, d^2\varphi + 2 \,.\, dr \,.\, d\varphi = 0$; ergo etiam $r \,.\, \frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2 \,.\, \frac{dr}{dt} \,.\, \frac{d\varphi}{dt} = 0$.

Jam ponamus $\frac{dr}{d\varphi} = r'$; tum est $dr = r' \,.\, d\varphi$; ergo $r \,.\, \frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2r' \,.\, \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = 0$.

Est autem $\frac{d\varphi}{dt} = \frac{c}{r^2}$; ideo etiam $\frac{d^2\varphi}{dt^2} = - 2r' \,.\, \frac{c^2}{r^5}$.

Differentiando æquationem $dr = r' \,.\, d\varphi$ accipimus $d^2r = d\varphi \,.\, dr' + r' \,.\, d^2\varphi$ ergo etiam est $\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{d\varphi}{dt} \,.\, \frac{dr'}{dt} + r' \,.\, \frac{d^2\varphi}{dt^2}$.

Ponamus autem $\frac{d^2r}{d\varphi^2} = \frac{dr'}{d\varphi} = r''$; tum est $dr' = r'' . d\varphi$; ergo $\frac{dr'}{dt} = r'' . \frac{d\varphi}{dt} = r'' . \frac{c}{r^2}$. Ideo est porro $\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{c^2}{r^4} . r'' - \frac{2r'^2 . c^2}{r^5}$; sive $\frac{d^2r}{dt^2} = c^2 . \frac{r . r'' - 2r'^2}{r^5}$; ergo denique

$$R = c^2 . \frac{r . r'' - 2r'^2 - r^2}{r^5}.$$

Exempli causa eruatur formula pro vi centrali, quæ valet, si punctum movetur in *sectione conica*, quia lex, quam in hoc casu sequitur vis centralis, notissima est. Ex æquatione igitur polari sectionum conicarum

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon . \cos \varphi}$$

eruendi sunt duo primi coefficientes differentiales r' et r''.

Est autem $r' = \frac{r}{p} . \sqrt{r^2 . \varepsilon^2 - p^2 + 2pr - r^2}$

$$r'' = \frac{2r^3 . \varepsilon^2 - 2r^3 + 3pr^2 - p^2r}{p^2}; \text{ ergo est}$$

$$R = -\frac{c^2}{p} . \frac{1}{r^2} . \text{ i. e.}$$

Si punctum aliquod movetur in sectione conica, vis centralis reciproce proportionalis est quadrato radii vectoris. Signum autem negationis docet, vim centralem in motibus, qui fiunt in sectionibus conicis, esse attractivam.

Restat in hac sectione, ut formulam deducamus pro vi centrali, quæ pertinet ad coordinatas orthogonales.

Ex definitione motuum centralium sequitur

$$\frac{y . d^2x - x . d^2y}{r . dt^2} = 0; \text{ inde } y . X - x . Y = 0; \text{ ergo } Y = \frac{y . X}{x}$$

Est autem $R = \frac{x . X + y . Y}{r}$. Si in hac formula pro Y ponitur $\frac{y . X}{x}$, tum evadit $R = \frac{r . X}{x}$. Eadem de causa est etiam $R = \frac{r . Y}{y}$. Ideo est

$$\frac{R}{r} = \frac{X}{x} = \frac{Y}{y}.$$

Ex æquatione curvæ data inter coordinatas orthogonales. x et y erui potest $\frac{dy}{dx} = p$; et inde $\frac{dp}{dx} = q$.

Jam differentiemus æquationem $dy = p . dx$ ita quidem, ut sint x et y functiones tertiæ cuiusdam quantitatis t; tum est $d^2y = p . d^2x + q . dx^2$; ergo

$$\frac{d^2y}{dt^2} = p . \frac{d^2x}{dt} + q . \left(\frac{dx}{dt}\right)^2, \text{ sive } Y = p . X + q . \left(\frac{dx}{dt}\right)^2.$$

Est porro $\frac{d\sigma}{dt} = \frac{c}{2}$; et $d\sigma = \frac{y \cdot dx - x \cdot dy}{2}$; ergo est $\frac{y \cdot dx - x \cdot dy}{dt} = c$; sive $y \cdot \frac{dx}{dt} - p \cdot x \cdot \frac{dx}{dt} = c$; ideoque $\frac{dx}{dt} = \frac{c}{y - px}$. Igitur est etiam $Y = p \cdot X + \frac{q \cdot c^2}{(y - px)^2}$. Si in hac æquatione substituitur $\frac{y \cdot X}{x}$ pro Y, tum ex ea evadit $X = \frac{c^2 \cdot q \cdot x}{(y - px)^3}$. Si vero substituitur $\frac{x \cdot Y}{y}$ pro X, tum ex ea fit $Y = \frac{c^2 \cdot q \cdot y}{(y - px)^3}$.

Erat autem $\frac{R}{r} = \frac{X}{x} = \frac{Y}{y}$; ergo denique est

$$R = \frac{c^2 \cdot q \cdot r}{(y - px)^3}.$$

Sectio III.

Problema: «*Data est lex, quam sequitur vis quædam centralis variabilis et locus, quem obtinet ista vis. Investiganda est natura curvæ, in qua movetur punctum mobile.*»

Sicut ad primum problema solvendum opus erat differentiatione eaque duplici quodammodo, sic ad solvendum hoc alterum problema opus est integratione eademque duplici.

Suppositio princeps est, ut vis centralis sit functio radii vectoris i. e. $R = \varphi(r)$.

Invenimus autem relationem inter quantitates R, X, Y, r, x, y : $\frac{R}{r} = \frac{X}{x} = \frac{Y}{y}$, ita ut sit $X = \frac{x \cdot R}{r}$ et $Y = \frac{y \cdot R}{r}$; unde sequitur

$$X \cdot dx + Y \cdot dy = R \cdot \frac{x \cdot dx + y \cdot dy}{r}.$$

Est autem $r^2 = x^2 + y^2$, ideoque $r \cdot dr = x \cdot dx + y \cdot dy$; ergo

$$X \cdot dx + Y \cdot dy = R \cdot dr.$$

Quum vero ex suppositione sit $R = \varphi(r)$, forma $R \cdot dr$ integrari potest. Substituamus autem pro X et Y valores $\frac{d^2x}{dt^2}$ et $\frac{d^2y}{dt^2}$; tum accipimus $R \cdot dr = \frac{dx \cdot d^2x + dy \cdot d^2y}{dt^2}$; Est porro, si ς significat arcum curvæ, $d\varsigma^2 = dx^2 + dy^2$; ergo etiam $\frac{1}{2} d(d\varsigma^2) = dx \cdot d^2x + dy \cdot d^2y$; ideo $2 R \cdot dr = \frac{d(d\varsigma^2)}{dt^2}$, sive $2 R \cdot dr = d\left(\frac{d\varsigma}{dt}\right)^2$; igitur etiam

$$\left(\frac{d\varsigma}{dt}\right)^2 = \int 2 R \cdot dr + A.$$

Quoniam vero est $d\varsigma^2 = dr^2 + r^2 \cdot d\varphi^2$, est etiam

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \left(\frac{r \cdot d\varphi}{dt}\right)^2 = \int 2 R \cdot dr + A.$$

Est porro $\frac{d\varphi}{dt} = \frac{c}{r^2}$ (cf. p. 4.), ideoque $\left(\frac{r \cdot d\varphi}{dt}\right)^2 = \frac{c^2}{r^2}$. Ergo etiam est

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{\int 2\,R \cdot dr + A - \frac{c^2}{r^2}} \text{ et}$$

$$t = \int \frac{dr}{\sqrt{\int 2\,R \cdot dr + A - \frac{c^2}{r^2}}}.$$

Hæc est æquatio inter spatium et tempus, ex qua facile erui potest generalis æquatio curvæ. Est enim $r^2 . d\varphi = c . dt$, ideoque $d\varphi = \frac{c . dt}{r^2}$. Substituto in hac æquatione valore pro dt accipimus

$$d\varphi = \frac{c . dr}{r . \sqrt{r^2 . \int 2\,R . dr + A . r^2 - c^2}}; \text{ ergo denique}$$

$$\varphi = \int \frac{c . dr}{r . \sqrt{r^2 . \int 2\,R . dr + A . r^2 - c^2}}.$$

Hæc est æquatio generalis inter radium vectorem et angulum variabilem. Continet enim permultarum curvarum æquationes, quæ ex ea evadunt, si pro vi centrali R aliæ atque aliæ functiones radii vectoris in ea substituuntur.

Priusquam ad alteram dissertationis partem transeamus, comprobemus veritatem istius æquationis eruentes ex ea æquationes sectionum conicarum, quas ex ea oriri oportet, si vim centralem attractivam supponimus ita comparatam, ut reciproce proportionalis sit radii vectoris quadrato (cf. p. 5).

Ponamus igitur $R = -\frac{m}{r^2}$, tum est $\int 2R . dr = \frac{2m}{r} + C$.

Hoc igitur valore in æquatione generali substituto evadit

$$\varphi = \int \frac{c \quad dr}{r . \sqrt{2mr + (A + C) . r^2 - c^2}} . = \int \frac{dr}{\sqrt{ar^3 + br^4 - r^2}},$$

siquidem ponimus $\frac{2m}{c^2} = a$ et $\frac{A + C}{c^2} = b$.

Iam vero tres distinguendi sunt casus. Esse potest $b \lesseqgtr 0$.

Si igitur ponimus $b = 0$, tum erit

$$\varphi = \int \frac{dr}{\sqrt{ar^3 - r^2}}.$$

Integrandi causa ponamus $r = \frac{1}{\varrho}$, igitur $dr = -\frac{d\varrho}{\varrho^2}$ et

$$\varphi = \int \frac{-d\varrho}{\sqrt{a\varrho - \varrho^2}} = \int \frac{-d\varrho}{\sqrt{\frac{a^2}{4} - \left(\varrho - \frac{a}{2}\right)^2}}.$$

Porro ponamus $\frac{\varrho - \frac{a}{2}}{\frac{a}{2}} = v$, igitur $d\varrho = \frac{a}{2} \cdot dv$; tum est

$$\varphi = \int \frac{-dv}{\sqrt{1 - v^2}} = \text{arc} \,.\, \cos (v).$$

Est igitur $\cos \varphi = v = \frac{\varrho - \frac{a}{2}}{\frac{a}{2}}$; ergo $\varrho = \frac{a}{2} \cdot (1 + \cos \varphi)$; et denique

$$r = \frac{\frac{2}{a}}{1 + \cos \varphi}.$$

Hæc autem æquatio ad *parabolam* pertinet, cuius parameter est $\frac{2}{a} = \frac{c^2}{m}$.

Si est $b \lessgtr 0$, tum habemus æquationem

$$\varphi = \int \frac{dr}{\sqrt{ar^3 + br^4 - r^2}}.$$

Hanc æquationem eadem ratione, qua modo usi sumus, transformando accipimus

$$r = \frac{\frac{2}{a}}{1 + \frac{\sqrt{a^2 + 4b}}{a} \cdot \cos \varphi}.$$

Hæc autem æquatio habet formam $r = \frac{p}{1 + \varepsilon \,.\, \cos \varphi}$, quæ æquatio ad *ellipsim* pertinet si $\varepsilon < 1$, ad *hyperbolam*, si $\varepsilon > 1$. Aequatio igitur eruta ad ellipsim pertinet, cuius parameter est $\frac{2}{a} = \frac{c^2}{m}$, si est $b < 0$; pertinet autem ad hyperbolam, cuius parameter est $\frac{c^2}{m}$, si est $b > 0$.

Altera pars.

Problema: « *Eruantur curvarum planarum æquationes earum, quæ celeritate quadam initiali data describuntur a puncto mobili, quod simul attrahitur ad centrum datum vi quadam centrali variabili ita comparata, ut reciproce proportionalis sit radii vectoris potentiæ quarti gradus. Ex æquationibus inventis derivetur cognitio proprietatum præcipuarum geometricarum, quæ curvis illis sunt insitæ.* »

Sectio I.
Eruuntur æquationes curvarum.

Vim centralem attractivam, quæ reciproce proportionalis est radii vectoris potentiæ quarti gradus exhibemus per æquationem

$$R = -\frac{3m}{r^4} = -3m \cdot r^{-4}.$$

Est igitur $\int 2R \cdot dr = \frac{2m}{r^3} + C.$

Hoc valore in æquatione generali substituto evadit

$$\varphi = \int \frac{c \cdot dr}{r \cdot \sqrt{\frac{2m}{r} + (A + C)\, r^2 - c^2}} = \int \frac{dr}{\sqrt{r \cdot \left(\frac{A + C}{c^2} \cdot r^3 - r + \frac{2m}{c^2}\right)}},$$

sive denotando $\frac{A + C}{c^2}$ per α^2 et $\frac{2m}{c^2}$ per β^2

$$\varphi = \int \frac{dr}{\sqrt{r \cdot (\alpha^2 \cdot r^3 - r + \beta^2)}}.$$

Hæc est æquatio generalis curvæ, quæ describitur a puncto mobili, si vis centralis attractiva reciproce proportionalis est radii vectoris potentiæ quarti gradus. Sed in hac æquatione plures distinguendi sunt casus.

Primum enim fieri potest, ut sit $A + C = 0$, igitur etiam $\alpha^2 = 0$; tum ista æquatio induit formam

$$\varphi = \int \frac{dr}{\sqrt{\beta^2 \cdot r - r^2}}.$$

Integrandi causa ponimus $v^2 = \frac{r}{\beta^2 - r}$; tum est

$$\varphi = 2 \cdot \int \frac{dv}{1 + v^2} = 2 \text{ arc tang } (v) = 2 \text{ arc tang } \left(\sqrt{\frac{r}{\beta^2 - r}}\right).$$

Ergo est $\text{tang}\, \frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{r}{\beta^2 - r}}$; unde sequitur $\sin \frac{\varphi}{2} = \frac{\sqrt{r}}{\beta}$; unde $r = \beta^2 \cdot \sin^2 \frac{\varphi}{2}$;

sive, quia $\beta^2 = \frac{2m}{c^2}$, $r = \frac{2m}{c^2} . \sin^2 \frac{\varphi}{2}$. Jam vero ponamus $\frac{2m}{c^2} = a$; tum est

$$\text{I.} \quad r = a . \sin^2 \frac{\varphi}{2}.$$

prima earum, quæ nobis eruendæ sunt, æquationum.

Quamquam per se esse non potest $\beta = 0$, quia tum foret etiam $R = 0$, tamen videamus, quæ æquatio evadat ex æquatione generali hac suppositione facta

Si ponimus $\beta = 0$, tum est $\varphi = \int \frac{dr}{r . \sqrt{\alpha^2 . r^2 - 1}}$. Denotando autem r per $\frac{1}{\varrho}$ accipimus

$$\varphi = \int \frac{-d\varrho}{\sqrt{\alpha^2 - \varrho^2}} = \int \frac{-d\frac{\varrho}{\alpha}}{\sqrt{1 - \left(\frac{\varrho}{\alpha}\right)^2}}, \text{ unde sequitur } \varphi = \text{arc cos} \left(\frac{\varrho}{\alpha}\right) = \text{arc cos} \left(\frac{1}{\alpha . r}\right).$$

Est igitur, si $\frac{1}{\alpha}$ denotamus per a,

$$r = \frac{a}{\cos \varphi}.$$

Hæc autem æquatio est æquatio polaris lineæ rectæ, quam evasuram esse, iam prævideri poterat. Si enim $\beta = 0$, tum est $R = 0$ i. e. vis centralis nulla valet, quare punctum eum habeat necesse est motum progressivum, qui ei tribuitur per celeritatem initialem.

Jam transeundum est ad eum casum, in quo non est $\alpha = 0$, in quo igitur est

$$\varphi = \int \frac{dr}{\sqrt{r . (\alpha^2 . r^3 - r + \beta^2)}}.$$

Integranda igitur est forma, quæ quod attinet ad quantitatem variabilem functio irrationalis est quarti gradus; id quod vulgaribus functionibus *cyclicis* adhibitis effici non potest.

Nihilominus functionibus *hyperbolicis* atque *modularibus* usi in problemate nostro solvendo non impediemur.

Hic autem casus dividi potest in duos, quia cogitare licet, primum, α^2 valorem habere *negativum;* tum vero, α^2 valorem habere *affirmativum;* namque $\beta^2 = \frac{2m}{c^2}$ semper valorem habet affirmativum. Ponamus igitur, ut α^2 valorem habeat negativum. Tum est

$$\varphi = \int \frac{dr}{\sqrt{r . (-\alpha^2 . r^3 - r + \beta^2)}}.$$

Forma cubica radicandi disponenda est in factores primi gradus. Qui factores sint:
$-\alpha^2 . (r - a)(r - b)(r - d) = -\alpha^2 . r^3 + \alpha^2 . (a + b + d) r^2 - \alpha^2 . (ab + ad + bd) . r + \alpha^2 . abd.$

Hæc forma quum eadem esse debeat, ac: $-\alpha^2 . r^3 - r + \beta^2$, necesse est, ut sit $a + b + d = 0$, quod, quum $\alpha^2 . a . b . d$ valorem habere debeat affirmativum, alio modo fieri non potest, quam, ut a et b sint quantitates negativæ; siquidem $a + b = d$.

Porro esse debet: $\alpha^2(ab-ad-bd)=1$, sive, quia $a+b=d$, $\alpha^2.(-a^2-ab-b^2)=1$. Hoc autem omnino fieri non potest; ergo eum casum, in quo α^2 valorem habeat negativum, mittere debemus; quare nobis tractandus est is tantum casus, in quo α^2 valorem habet affirmativum, in quo igitur est

$$\varphi = \int \frac{dr}{\sqrt{r.(\alpha^2.r^3 - r + \beta^2)}}.$$

Forma cubica radicandi disponi potest in factores primi gradus. Qui factores sint $\alpha^2.(a-r)(b-r)(d+r) = \alpha^2.r^3 + \alpha^2.(-a-b+d)r^2 - \alpha^2.(ad+bd-ab).r + \alpha^2.a.b.d.$

Hæc forma, ut eadem esse possit, ac forma illa cubica radicandi, necesse est, ut sit

$$a + b = d;\quad \alpha^2.(ad + bd - ab) = 1;\quad \alpha^2.a.b.d = \beta^2.$$

Substituendo igitur pro forma illa cubica radicandi productum illud factorum primi gradus oritur

$$\varphi = \int \frac{dr}{\sqrt{r.\alpha^2.(a - r)(b - r)(d + r)}}.$$

Ex tribus autem illis æquationibus inter quantitates a, b, d, α^2, β^2, quantitates α^2 et β^2 exprimi possunt per quantitates a et b; est enim

$$\alpha^2 = \frac{1}{a^2 + ab + b^2} \text{ et } \beta^2 = \frac{ab.(a + b)}{a^2 + ab + b^2}.$$

Si igitur hunc valorem pro α^2 ponimus in æquatione curvæ et $a + b$ pro d, tum erit

$$\varphi = \int \frac{dr.\sqrt{a^2 + ab + b^2}}{\sqrt{r(a - r)(b - r)(a + b + r)}}.$$

Brevi calculo etiam vis centralis exprimi potest per quantitates a et b. Posueramus enim (p. 9) $\beta^2 = \frac{2m}{c^2}$; unde sequitur $m = \frac{\beta^2.c^2}{2}$. Substituendo igitur in formula pro R. (p. 9) $\frac{\beta^2.c^2}{2}$ loco m accipimus

$$R = -\frac{3abc^2.(a + b)}{2.(a^2 + ab + b^2)} \cdot \frac{1}{r^4}.$$

Jam distinguendi sunt in universum, quod attinet ad relationem inter quantitates a et b casus tres. Esse enim potest 1) $a = b$; 2) $a < b$; 3) $a > b$.

Quoniam vero formulæ pro φ et R symmetricæ sunt, quod attinet ad quantitates a et b, de casibus 2) et 3) unus tantum tractandus est.

Jam igitur transeamus ad primum casum tractandum, in quo est $a = b$; ideoque

$$\varphi = \int \frac{a.\sqrt{3}.dr}{(a - r).\sqrt{r(2a + r)}}.$$

Integrandi causa ponimus $v^2 = \frac{r}{2a + r}$; tum est $r = \frac{2a.v^2}{1 - v^2}$, et $dr = \frac{4a.v.dv}{(1 - v^2)^2}$.

Ergo est

$$\varphi = \int \frac{2 \, . \sqrt{3} \, . \, dv}{1 - 3v^2} = \int \frac{2 \, . \, d\,(v \, . \sqrt{3})}{1 - (v \, . \sqrt{3})^2} = 2 \, \text{Arc Tang} \, (v \, . \sqrt{3}). \text{ *)}$$

Est igitur $\text{Tang} \frac{\varphi}{2} = v \, . \sqrt{3}$, unde, si pro v substituitur valor, fit

$$\text{II.} \quad \text{Tang} \frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{3r}{2a + r}}.$$

Hæc est æquatio secundæ curvæ, in qua punctum mobile vi centrali ut supposuimus comparata moveri potest.

Restat, ut unum tractemus de casibus 2) et 3). Sumamus igitur casum 2), in quo est $a < b$.

Si in universum non est $a = b$, tum est

$$\varphi = \int \frac{dr \, . \sqrt{a^2 + ab + b^2}}{\sqrt{r \, (a - r) \, (b - r) \, (a + b + r)}}.$$

Integrandi causa ponimus $v^2 = \frac{r}{a + b + r}$; unde sequitur $r = \frac{(a + b) \, . \, v^2}{1 - v^2}$ et $dr = \frac{2 \, (a + b) \, v \, . \, dv}{(1 - v^2)^2}$. Ergo est

$$\varphi = 2 \, . \sqrt{\frac{a^2 + ab + b^2}{ab}} \, . \int \frac{dv}{\sqrt{\left(1 - \frac{2a + b}{a} \, . \, v^2\right) . \left(1 - \frac{2b + a}{b} \, . \, v^2\right)}}.$$

Hoc autem integrale, quia φ evanescit pro $r = 0$, ergo etiam pro $v = 0$; formam habet

$$\int_0 \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2) \, (1 - k^2 . x^2)}}.$$

Omnino eadem sunt hæc integralia, si est

$$x = v \, . \sqrt{\frac{2a + b}{a}}; \quad kx = v \, . \sqrt{\frac{2b + a}{b}}; \quad dx = dv \, . \sqrt{\frac{2a + b}{a}}.$$

Est autem $\arg \text{sn} \, (x) = \int_0 \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2) \, (1 - k^2 . x^2)}}$. **)

Ergo est, si ponimus $u = \arg \text{sn} \, (x)$,

$$\varphi = 2 \, . \sqrt{\frac{a^2 + ab + b^2}{b \, . \, (2a + b)}} \, . \, u,$$

unde, si porro ponimus $n = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{b \, (2a + b)}{a^2 + ab + b^2}}$, sequitur

$$\varphi = \frac{u}{n}, \text{ sive } u = n \, . \, \varphi.$$

*) cf. Gudermann: Theorie der Potential-Functionen p. 21.
**) cf. Gudermann: Theorie der Modular-Functionen p. 14.

Priusquam constituamus æquationem curvæ ipsam, exprimamus per quantitates a et b modulos coniugatos k et k', inter quos eadem ratio intercedit, quæ inter sinum cyclicum et cosinum eiusdem arcus, scilicet ut sit $k^2 + k'^2 = 1$.

Ex æquationibus: $x = v \cdot \sqrt{\frac{2a + b}{a}}$ et: $k \cdot x = v \cdot \sqrt{\frac{2b + a}{b}}$ sequitur

$$k = \sqrt{\frac{a \cdot (a + 2b)}{b \cdot (2a + b)}}; \text{ indeque } k' = \sqrt{\frac{(b + a)\ (b - a)}{b \cdot (2a + b)}}.$$

Jam igitur constituenda est æquatio curvæ ipsa. Erat $u = \arg \operatorname{sn}(x)$, et $x = \sqrt{\frac{(2a + b) \cdot r}{a \cdot (a + b + r)}}$; ergo est

$$\text{III.} \quad \operatorname{sn} u = \sqrt{\frac{(2a + b) \cdot r}{a \cdot (a + b + r)}}.$$

Hæc est tertia atque ultima æquationum eruendarum, quoniam alii casus, quam quos tractavimus, cogitari non possunt. Hæc æquatio non directe significat relationem inter radium vectorem et angulum variabilem, sed indirecte, intercedente quidem æquatione illa $\varphi = \frac{u}{n}$ inter argumentum u et angulum φ. Si enim ex æquatione curvæ pro aliquo valore radii vectoris inventus est valor argumenti ad illum radii vectoris valorem pertinentis, tum ex hac altera æquatione computabitur atque invenietur is valor anguli variabilis qui ad eundem illum pertinet valorem radii vectoris.

Quum vero in ratiocinando adhiberi non possint functiones *modulares*, necesse est, ut ab iis transiri possit ad vulgares functiones *cyclicas*. Hoc autem fieri potest per æquationes illas fundamentales:

$$\operatorname{sn} u = \sin \operatorname{am} u; \quad \operatorname{cn} u = \cos \operatorname{am} u; \quad \operatorname{tn} u = \operatorname{tang} \operatorname{am} u; \quad \operatorname{dn} u = \sqrt{1 - k^2 \cdot \sin^2 \operatorname{am} u}.$$

Ut igitur a functionibus *modularibus* ad vulgares functiones *cyclicas* transire possimus, habeamus necesse est formulam, qua relatio exprimitur argumentum inter et amplitudinem eiusdem argumenti, ita, ut ex dato argumento moduloque inveniri possit amplitudo huius argumenti.

Tales autem formulas docuit Gudermannus elegantissimas*), quarum unam ante oculos habere haud ingratum erit. Primam igitur illarum formularum huc transferamus:

$$\operatorname{am} u = \eta u + \frac{\sin 2\eta u}{\operatorname{Cos} 2\eta K'} + \tfrac{1}{2} \cdot \frac{\sin 4\eta u}{\operatorname{Cos} 4\eta K'} + \tfrac{1}{3} \cdot \frac{\sin 6\eta u}{\operatorname{Cos} 6\eta K'} + \tfrac{1}{4} \cdot \frac{\sin 8\eta u}{\operatorname{Cos} 8\eta K'} \cdots\cdots$$

Sectio II.

De proprietatibus geometricis curvarum, quarum æquationes in sectione I. erutæ sunt.

Disquisitionem de curvarum proprietatibus geometricis in universum hac ratione instituemus, ut præmissis iis curvarum proprietatibus, quæ ex ipsa curvæ æquatione profici-

*) Theorie der Modular-Functionen p. 396 et q. s.

scentes nobis se offerunt, singulis articulis eodemque ordine disquisitio fiat de tangente, de normali, de subtangente, de subnormali, de radio osculi, de evoluta, de rectificatione, denique de quadratura.

Cap. I.

De proprietatibus geometricis curvæ primæ.

Aequationem curvæ primæ erueramus p. 10.

$$r = a \, . \sin^2 \frac{\varphi}{2}, \qquad (1).$$

cui statim altera forma dari potest

$$r = \frac{a}{2} \, . \, (1 - \cos \varphi). \qquad (2).$$

Comparando hanc æquationem cum æquatione eius curvæ, quæ *Cardioidis* vocatur, statim invenies, has æquationes ad eandem pertinere curvam. Vulgaris enim *Cardioidis* æquatio hæc est:

$$r = 2\alpha \, . \, (1 + \cos \varphi).$$

Hæc autem æquatio statim in nostram commutabitur, dummodo pro 2α substituerimus $\frac{a}{2}$ et $(\pi - \varphi)$ pro φ, quod facere licet, quia prima radii vectoris directio omnino ad arbitrium sumi potest. In posterum igitur suo nomine curvam appellabimus.

Præcipuæ *Cardioidis* proprietates geometricæ a pluribus iam sunt investigatæ, ea autem, quod equidem sciam, ratione, ut *Epicycloidis* proprietates in *Cardioidem* transferrentur, quod facillimum est, quoniam *Cardioidis* est *Epicycloidis*, in qua radius circuli generatoris æqualis est radio circuli immobilis. Nos vero *Cardioidis* proprietates, quoad fieri potest, ex ipsius *Cardioidis* æquatione eruemus.

Exprimendo angulum φ per radium vectorem r æquatio curvæ hanc accipit formam:

$$\sin \frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{r}{a}}. \qquad (3).$$

Ex hac autem æquatione facile derivantur duæ aliæ:

$$\cos \frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{a - r}{a}}. \qquad (4).$$

$$\tang \frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{r}{a - r}}. \qquad (5).$$

Hæ omnes æquationes ita sunt comparatæ, ut valores $r = 0$ et $\varphi = 0$ iis satisfaciant, unde sequitur, ut vertex anguli variabilis sit punctum curvæ. Aequatio (4) docet, quia cosinus est functio impar, itaque $\cos \frac{\varphi}{2} = \cos \left(- \frac{\varphi}{2}\right)$, radios vectores pro paribus versionibus in diversas partes parem habere longitudinem. Unde sequitur, ut curva constet ex duobus ramis congruentibus. Aequationes (4) et (5) docent, quantitatem a maximum

radii vectoris esse valorem, radium vectorem contineri igitur inter limites 0 et a; namque si in his æquationibus ponimus $r > a$, tum $\cos \frac{\varphi}{2}$ et $\tang \frac{\varphi}{2}$, ergo etiam ipse angulus φ valorem habet non realem, sed imaginarium. Curva igitur tota continetur eo circulo, qui ex vertice anguli variabilis radio a describitur, ita quidem, ut in illo puncto, cuius $r = a$, curva in circulum incurrat. Hoc autem punctum facile determinari potest in circumferentia circuli, dummodo data sit prima radii vectoris directio. Aequationes enim curvæ docent, pro $r = a$ esse $\varphi = \pi$. Unde sequitur, ut punctum, in quo rami curvæ in circulum incurrunt, illud sit, in quo prima radii vectoris directio in contrariam partem prolongata circulum intersecat.

Ex his, quæ investigavimus, iam aliquo modo cursus, ut ita dicam, curvæ cognosci potest. Si enim describitur circulus K radio a, tum scimus, curvam totam intra hunc circulum contineri, si centrum C circuli est punctum centrale. Duo igitur ducti sint diametri inter se normales AB et DG; præterea sit CA prima radii vectoris directio, et ea areæ circularis pars, quæ supra AC sita est, vocetur quadrans primus; tum alter curvæ ramus exiens a puncto C movebitur per primum quadrantem; tum intersecabit in aliquo puncto accuratius determinando lineam CD, curret per secundum quadrantem et in puncto B incurret in circulum K. Eadem ratione alter curvæ ramus movebitur infra lineam AB.

Illud vero punctum intersectionis brevi calculo invenies determinando radium vectorem eius puncti, quod eo efficies, ut in æquatione curvæ ponas $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Tum enim statim evadit $r = \frac{a}{2}$.

Insignem quandam curvæ proprietatem docet æquatio

$$r' = \frac{a}{2} \cdot (1 - \cos \varphi).$$

Si enim in hac æquatione ponimus $(\pi - \varphi)$ pro φ, tum est

$$r'' = \frac{a}{2} \cdot (1 + \cos \varphi).$$

Ergo est $r' + r'' = a$, i. e. Si radius vector trans verticem anguli variabilis prolongatur usque ad curvam, tum horum duorum summa radiorum vectorum quantitas constans est, æqualis radio eius circuli, qui curvam includit. Facillime igitur uno curvæ ramo delineato etiam alter delineari potest.

Ut curvæ cursus accuratius cognosci possit, determinemus longitudinem radii vectoris aliquot curvæ punctorum pro certis quibusdam angulis φ, et videamus, quod punctum curvæ in primo quadrante maximam habeat distantiam a linea CD, quodque omnino a linea CB.

Si in æquatione (1) ponimus $\varphi = \frac{1}{3}\pi$, tum evadit $r = \frac{1}{4}a$; si ponimus $\varphi = \frac{2}{3}\pi$, accipimus $r = \frac{3}{4}a$.

Sit porro y distantia curvæ a linea CD in primo quadrante.

Est $y = r \cdot \cos\varphi = \frac{a}{2} \cdot \cos\varphi - \frac{a}{2} \cdot \cos^2\varphi$.

Quæritur, qui valor anguli efficiat, ut y sit *maximum*.

Est $\frac{dy}{d\varphi} = -\frac{a}{2} \cdot \sin\varphi + a \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi$; et

$$\frac{d^2y}{d\varphi^2} = -\frac{a}{2} \cdot \cos\varphi + a \cdot (\cos^2\varphi - \sin^2\varphi).$$

Est autem $\frac{dy}{d\varphi} = 0$, si ponimus $\cos\varphi = \frac{1}{2}$, sive $\varphi = \frac{1}{3}\pi$; et pro eodem valore anguli φ habet $\frac{d^2y}{d\varphi^2}$ valorem negativum, scilicet $(-\frac{3}{4}a)$; ergo y est *maximum*, si est $\varphi = \frac{1}{3}\pi$; sive $r = \frac{1}{4}a$; tum autem est $y = \frac{1}{8}a = Cp$.

Simili ratione invenimus, si $z = r \cdot \sin\varphi$ distantiam curvæ significat a linea CB, z esse *maximum*, si est $\varphi = \frac{2}{3}\pi$, sive $r = \frac{3}{4}a$. Est autem, si $CM = \frac{3}{4}a$, $CP = \frac{3}{8}a$.

Lineæ igitur AB, mn, m′n′, quæ angulos inter se efficiunt $= \frac{1}{3}\pi$, insignem habent proprietatem: AB, quod curvam intersecat in duobus punctis, quorum unum minimam, alterum maximam habet distantiam a puncto centrali. Lineæ autem mn et m′n′, quod curvam intersecant in punctis, ad quæ *maxima* illa pertinent, de quibus modo diximus.

Linea dg, quæ in puncto p normalis est ad lineam AB, curvam tangit in punctis a et b.

Curva igitur fere eam habebit formam, quam ante oculos ponit figura (2). Nomen autem curvæ referendum est ad similitudinem, quam habet cum corde.

1. De tangente *Cardioidis*.

Si λ significat angulum, quem linea tangens facit cum radio vectore, tum est $\tang \lambda = \frac{r \cdot d\varphi}{dr}$. Est autem æquatio differentialis curvæ: $dr = a \cdot \sin\frac{\varphi}{2} \cdot \cos\frac{\varphi}{2} \cdot d\varphi$.

Si igitur in formula illa pro $\tang \lambda$ substituitur loco r valor ex æquatione (1) et loco dr ex æquatione differentiali, evadit $\tang \lambda = \tang \frac{\varphi}{2}$; unde sequitur

$$\lambda = \frac{\varphi}{2}. \qquad (6).$$

Hæc æquatio docet, facillimum esse, in quovis curvæ puncto ad eam ducere tangentem. Ita enim semper dirigenda est linea tangens, ut angulus, quem facit cum radio vectore, æquetur dimidio angulo, quem radius vector facit cum prima sua directione.

Aequatio (6) porro docet, esse $\lambda = 0$ pro $\varphi = 0$, i. e. primam radii vectoris directionem tangentem esse curvæ in vertice anguli variabilis. Si vero ponimus $\varphi = \pi$, tum est $\lambda = \frac{\pi}{2}$. Vidimus autem, pro $\varphi = \pi$ esse $r = a$. Ergo sequitur, ut in illo curvæ puncto, cuius radius vector $r = a$, linea tangens sit normalis ad radium vectorem. Quod

quum idem sit in circulo, ea linea, quæ in puncto B tangit *Cardioidem*, in eodem puncto etiam tangit circulum *K*. Unde colligitur, ut etiam curva et circulus in illo puncto se invicem tangant.

Quoniam vero uterque curvæ ramus circulum tangit in puncto B, utriusque rami curvatura in illo ipso puncto eadem sit necesse est, ideoque quodammodo ambo curvæ rami pro una linea accipi possunt.

Si ponimus $\varphi = \frac{\pi}{2}$, est $\lambda = \frac{\pi}{4}$. Curva igitur cum linea CD angulum efficit $= \frac{\pi}{4}$.

Longitudo tangentis polaris determinanda est ex formula: $\text{Tang.} = \frac{r}{\cos\lambda}$.

Est autem $\cos\lambda = \cos\frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{a-r}{a}}$; ergo

$$\text{Tang.} = \frac{r}{\cos\frac{\varphi}{2}} = r \, . \sqrt{\frac{a}{a-r}}. \qquad (7).$$

Si in his formulis ponimus $r = \varphi = 0$, videmus, evanescere tangentem. Pro $\varphi = \frac{1}{3}\pi$ est $\text{Tang.} = \frac{a}{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{3}}$; pro $\varphi = \frac{\pi}{2}$ est $\text{Tang.} = a \, . \sqrt{\frac{1}{2}}$; pro $\varphi = \frac{2}{3}\pi$ est $\text{Tang.} = \frac{3}{2}a$; pro $\varphi = \pi$ denique est $\text{Tang.} = \infty$, i. e. tangens polaris puncti B infinite magna est.

2. De normali polari.

Longitudo normalis determinanda est ex formula:

$$\text{Norm.} = \frac{r}{\sin\lambda} = \sqrt{a \, . \, r} = a \, . \sin\frac{\varphi}{2}. \qquad (8).$$

Hæc formula docet, pro $\varphi = 0$ evanescere normalem; pro $\varphi = \frac{1}{3}\pi$ esse normalem $= \frac{1}{2}a$; pro $\varphi = \frac{\pi}{2}$ esse normalem $= a \, . \sqrt{\frac{1}{2}}$; pro $\varphi = \frac{2}{3}\pi$ esse normalem $= \frac{a}{2} \cdot \sqrt{3}$; pro $\varphi = \pi$ denique esse normalem $= a$. Videmus igitur, normalem puncti E æquari tangenti eiusdem puncti, differentiam autem tangentis et normalis puncti B infinite magnam esse. Necesse est igitur, ut inde a puncto E usque ad punctum B rapidissime crescat tangens.

3. De subtangente polari.

Longitudo subtangentis determinanda est ex formula:

$$\text{Sbt} = \frac{r^2 . \, d\varphi}{dr} = r \, . \, \text{tang}\,\lambda = r \, . \, \text{tang}\,\frac{\varphi}{2} = r \, . \sqrt{\frac{r}{a-r}}. \qquad (9).$$

Hæ formulæ docent, pro $\varphi = 0$ evanescere subtangentem; pro $\varphi = \frac{1}{3}\pi$ esse subtangentem $= \frac{a}{4} \cdot \sqrt{\frac{1}{3}}$; pro $\varphi = \frac{\pi}{2}$ esse subtangentem $= \frac{a}{2}$; pro $\varphi = \frac{2}{3}\pi$ esse subtangentem $= \frac{3}{4}a \, . \sqrt{3}$; pro $\varphi = \pi$ denique subtangentem esse infinite magnam, quod quidem per se iam patet.

4. De subnormali polari.

Longitudo subnormalis determinanda est ex formula:

$$Sbn = \frac{dr}{d\varphi} = \frac{r}{\text{tang}\,\lambda} = \frac{r}{\text{tang}\,\frac{\varphi}{2}} = \sqrt{r\,.\,(a-r)}. \quad \ldots \quad (10).$$

Hæ formulæ docent, pro $\varphi = 0$ evanescere subnormalem; pro $\varphi = \frac{1}{3}\pi$ et $\varphi = \frac{2}{3}\pi$ esse subnormalem $= \frac{a}{4} \cdot \sqrt{3}$; pro $\varphi = \frac{\pi}{2}$ esse subnormalem $= \frac{a}{2}$; et pro $\varphi = \pi$ rursus evanescere subnormalem. Unde sequitur, ut subnormalis habeat *maximum* necesse sit. Ergo quæritur, quænam sit maxima subnormalis longitudo.

Est autem primus coefficiens differentialis $\frac{d\,Sbn}{dr} = \frac{a - 2r}{2\,.\sqrt{r\,.\,(a-r)}}$, qui evanescit, si ponitur $r = \frac{a}{2}$.

Porro est secundus coefficiens differentialis $\frac{d^2\,Sbn}{dr^2} = -\frac{4r\,.\,(a-r) + (a-2r)^2}{4\,.\,(r\,.\,[a-r])^{3/2}}$, ex quo substituendo $\frac{a}{2}$ pro r fit $\frac{d^2\,Sbn}{dr^2} = -\frac{2}{a}$.

Omnium igitur curvæ subnormalium ea est longissima, quæ pertinet ad punctum E.

5. De radio osculi.

Si P significat radium osculi et π eam normalem, quæ demissa est ex vertice anguli variabilis in lineam tangentem, tum est $P = \frac{r\,.\,dr}{d\pi}$. Est autem $\pi = r\,.\sin\lambda = r\,.\sqrt{\frac{r}{a}}$, ideoque $d\pi = \frac{3}{2}\,.\sqrt{\frac{r}{a}}\ dr$; ergo denique

$$P = \frac{2}{3}\,.\sqrt{a\,.\,r}. \qquad (11).$$

Hæc formula docet, pro $r = 0$ esse $P = 0$, i. e. in puncto C ramos curvæ efficere *rostrum*, punctum C igitur esse *punctum duplex* curvæ. Pro $r = \frac{1}{4}a$ est $P = \frac{1}{3}a$. Si denique ponitur $r = a$, tum est $P = \frac{2}{3}a$.

6. De evoluta.

Si r et φ sunt coordinatæ polares curvæ principis, λ is angulus, quem linea tangens facit cum radio vectore, P radius osculi, ϱ et ψ coordinatæ polares evolutæ, tum hæ duæ valent æquationes:

$$\text{I.} \quad \psi = \varphi + \text{arc tang}\left(\frac{P\,.\cos\lambda}{r - P\,.\sin\lambda}\right);$$

$$\text{II.} \quad \varrho^2 = r^2 - 2r\,.\,P\,.\sin\lambda + P^2.$$

Est autem $\cos \lambda = \cos \frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{a - r}{a}}$; $\sin \lambda = \sqrt{\frac{r}{a}}$; $P = \frac{2}{3} . \sqrt{a . r}$, ideoque $P . \cos \lambda = \frac{2}{3} . \sqrt{r . (a - r)}$; $P . \sin \lambda = \frac{2}{3} r$; et $\varphi = 2 \text{ arc } \sin \left(\sqrt{\frac{r}{a}} \right)$.

His valoribus in æquationibus I et II substitutis evadit

$$\text{I.} \quad \psi = 2 \text{ arc } \sin \left(\sqrt{\frac{r}{a}} \right) + \text{arc tang} \left(2 . \sqrt{\frac{a - r}{r}} \right).$$

$$\text{II.} \quad \varrho = \frac{\sqrt{r . (4a - 3r)}}{3}.$$

Ad constituendam æquationem evolutæ valor radii vectoris r deductus ex æquatione II substituendus est in æquatione I.

Est autem $r = \frac{2a \pm \sqrt{4a^2 - 27\varrho^2}}{3}$. Ergo

$$\psi = 2 \text{ arc } \sin \left(\sqrt{\frac{2a \pm \sqrt{4a^2 - 27\varrho^2}}{3a}} \right) + \text{arc tang} \left(2 . \sqrt{\frac{a \mp \sqrt{4a^2 - 27\varrho^2}}{2a \pm \sqrt{4a^2 - 27\varrho^2}}} \right). \quad (12).$$

Hæc est æquatio evolutæ *Cardioidis.*

Jam vero quæritur propter ambiguitatem in signis, quænam valeant signa. Hæc difficultas ita removenda est. Inter quantitates r et ϱ ea ratio intercedit, ut evanescente una simul et altera evanescat, et crescente una simul et altera crescat. Ut igitur hæc ratio recte significetur, formula pro r ita accipienda est:

$$r = \frac{2a - \sqrt{4a^2 - 27\varrho^2}}{3}.$$

Vidimus autem, pro $r = a$ esse $P = \frac{2}{3}a$; unde sequitur, ut pro $r = a$ sit $\varrho = \frac{1}{3}a$. Hoc vero per formulam illam pro r non significatur, nisi ita accipiatur:

$$r = \frac{2a + \sqrt{4a^2 - 27\varrho^2}}{3}.$$

Hæc disquisitio docet, in universum hanc esse propriam evolutæ *Cardioidis* æquationem:

$$\psi = 2 \text{ arc } \sin \left(\sqrt{\frac{2a - \sqrt{4a^2 - 27\varrho^2}}{3a}} \right) + \text{arc tang} \left(2 . \sqrt{\frac{a + \sqrt{4a^2 - 27\varrho^2}}{2a - \sqrt{4a^2 - 27\varrho^2}}} \right). \quad (13).$$

Id vero evolutæ punctum, quod respondet *Cardioidis* puncto B, determinandum est ex formula:

$$\psi = 2 \text{ arc } \sin \left(\sqrt{\frac{2a + \sqrt{4a^2 - 27\varrho^2}}{3a}} \right) + \text{arc tang} \left(2 . \sqrt{\frac{a - \sqrt{4a^2 - 27\varrho^2}}{2a + \sqrt{4a^2 - 27\varrho^2}}} \right). \quad (14).$$

Aequatio II docet, pro $r = 0$ esse $\varrho = 0$, i. e. punctum C esse punctum evolutæ. Aequatio I autem docet, pro $r = 0$ esse $\psi = \frac{\pi}{2}$, i. e. lineam CD esse primam radii vectoris evolutæ directionem. Linea autem CD normalis est ad punctum C *Cardioidis*; ergo tangit hæc linea evolutam in puncto C.

Hoc loco liceat recurrere ad rationem, quæ *Cardioidi* intercedit cum *Epicycloide.* Notum est enim, evolutam *Epicycloidis* alteram esse *Epicycloidem.* Ideo evoluta *Cardioidis* altera est *Cardioidis*, cuius æquatio hæc est:

$$r = \frac{a}{3} \cdot \sin^2 \frac{\varphi}{2}. \qquad (15).$$

7. De rectificatione *Cardioidis.*

Rectificandus sit arcus curvæ BZ $= \varsigma$; tum est

$$d\varsigma = - \sqrt{dr^2 + r^2 . d\varphi^2}.$$

Differentiando autem curvæ æquationem (1) invenimus $d\varphi = \frac{dr}{\sqrt{r . (a - r)}}$. Igitur est

$$\varsigma = \int - dr . \sqrt{\frac{a}{a - r}} = 2 . \sqrt{a (a - r)}. \qquad (16).$$

Quantitas enim constans hic evanescit, quia pro $r = a$ ipsum evanescit integrale.

Formula (16) facillime ita transformari potest, ut arcus sit functio anguli variabilis. Est enim $\cos \frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{a - r}{a}}$; ergo etiam

$$\varsigma = 2a . \cos \frac{\varphi}{2}. \qquad (17).$$

Formulæ (16) et (17) docent, pro $r = 0$ sive $\varphi = 0$ esse $\varsigma = BMC = 2a$; pro $r = \frac{1}{4}a$, sive $\varphi = \frac{1}{3}\pi$ esse $\varsigma = a . \sqrt{3}$; pro $r = \frac{a}{2}$ sive $\varphi = \frac{\pi}{2}$ esse $\varsigma = BE = a . \sqrt{2}$; pro $r = \frac{3}{4}a$ denique, sive $\varphi = \frac{2}{3}\pi$ esse $\varsigma = BM = a = CM$.

8. De quadratura *Cardioidis.*

Si σ significat aream sectoris, tum est generatim

$$\sigma = \int \frac{r^2}{2} . d\varphi$$

Est autem $d\varphi = \frac{dr}{\sqrt{r (a - r)}}$; ergo etiam

$$\sigma = \int \frac{r^2}{2} . \frac{dr}{\sqrt{r (a - r)}}.$$

Integrandi causa ponamus $\frac{r}{a} = v^2$; tum est $r = a . v^2$ et $dr = 2a . v . dv$; unde sequitur

$$\sigma = \int \frac{a^2 . v^4 . dv}{\sqrt{1 - v^2}}.$$

Est autem $\frac{dv}{\sqrt{1 - v^2}} = d \text{ arc } \sin (v) = d\psi$ (cond. $\sin \psi = v$); ideo est

$$\sigma = \int a^2 . \sin^4 \psi . d\psi; \text{ ergo}$$

$$\sigma = \frac{1.3}{2.4} . a^2 . (\psi - \sin \psi . \cos \psi - {}^2\!/_3 . \sin^3 \psi . \cos \psi).$$

Quantitas constans ommissa est, quia area evanescit, si ponitur $\psi = 0$.

Est autem $\sin \psi = \sqrt{\frac{r}{a}} = \sin \frac{\varphi}{2}$; ideoque

$$\sigma = \frac{1.3}{2.4} a^2 . \left(\text{arc} \sin \left(\sqrt{\frac{r}{a}} \right) - \frac{\sqrt{r (a - r)}}{a} - \frac{2}{3} . \frac{\sqrt{r^3 . (a - r)}}{a^2} \right); \qquad (18).$$

sive: $$\sigma = \frac{1.3}{2.4} a^2 . \left(\frac{\varphi}{2} - \sin \frac{\varphi}{2} . \cos \frac{\varphi}{2} - \frac{2}{3} . \sin^3 \frac{\varphi}{2} . \cos \frac{\varphi}{2} \right). \qquad (19).$$

Aequatio (19) facile in aliam transformari potest, quæ aream proponit ut functionem arcus. Erat enim $\cos \frac{\varphi}{2} = \frac{\varsigma}{2a}$ (17); ideoque est $\sin \frac{\varphi}{2} = \frac{\sqrt{4a^2 - \varsigma^2}}{2a}$. His valoribus in æquatione (19) substitutis accipimus

$$\sigma = \frac{1.3}{2.4} a^2 . \left(\text{arc} \cos \left(\frac{\varsigma}{2a} \right) - \frac{\varsigma . \sqrt{4a^2 - \varsigma^2}}{4a^2} - \frac{1}{3} . \frac{\varsigma . (4a^2 - \varsigma^2)^{3/2}}{8a^4} \right). \qquad (20).$$

Si ponimus in æquatione (18) $r = a$, sive in (19) $\varphi = \pi$, sive in (20), $\varsigma = 2a$, tum evadit $\sigma = {}^3\!/_{16} \pi . a^2$. Totius igitur *Cardioidis* area est ${}^3\!/_8 \pi . a^2$. Atqui $\pi . a^2$ est area circuli K; ergo area *Cardioidis* est ${}^3\!/_8$ eius circuli, qui describitur axe *Cardioidis*, quo nomine haud male significari videtur linea $CB = a$.

Cap. II.

De proprietatibus curvæ secundæ.

Aequationem curvæ secundæ eruimus (p. 12.)

$$\mathfrak{Tang} \frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{3r}{2a + r}}. \qquad (1).$$

Deducamus primum reliquas functiones anguli $\frac{\varphi}{2}$, prætereaque functiones anguli φ. Invenimus

$$\mathfrak{Sin} \frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{3r}{2a - 2r}}. \qquad (2). \qquad \mathfrak{Cos} \frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{2a + r}{2a - 2r}}. \qquad (3).$$

$$\mathfrak{Sin}\ \varphi = \frac{\sqrt{3r (2a + r)}}{a - r}. \qquad (4). \qquad \mathfrak{Cos}\ \varphi = \frac{a + 2r}{a - r}. \qquad (5).$$

$$\mathfrak{Tang}\ \varphi = \frac{\sqrt{3r (2a + r)}}{a + 2r}. \qquad (6).$$

Omnibus his æquationibus valores $r = 0$ et $\varphi = 0$ satisfaciunt; quam ob rem vertex anguli variabilis est punctum curvæ. Porro ex iisdem causis, quas in *Cardioide* ex-

posuimus (p. 14.), curva ex duobus constat ramis congruentibus, qui exeuntes a puncto centrali, sive vertice anguli variabilis ita currunt in diversas partes, ut initio saltem alter supra, alter infra primam radii vectoris directionem moveatur.

Aequationes curvæ porro docent, pro $r = a$ esse $\varphi = \infty$. Hoc sequitur ex notione functionum hyperbolicarum. Possumus etiam ita demonstrare.

Denotantes functionem longitudinalem cyclicam arcus φ per $\mathrm{l}\varphi$ *) et functionem hyperbolicam per $\mathfrak{L}\varphi$ ita argumentamur. Si ponimus $r = a$, tum est $\mathfrak{Tang}\,\frac{\varphi}{2} = 1$. Est autem $\mathfrak{Tang}\,\frac{\varphi}{2} = \operatorname{tang} \frac{1}{2}\,\mathrm{l}\varphi$. Ergo est $\mathrm{l}\varphi = \frac{\pi}{2}$; ideoque $\varphi = \mathfrak{L}\frac{\pi}{2} = \infty$, quia

$$\mathfrak{L}\frac{\pi}{2} = \log \sqrt{\frac{1 + \sin\frac{\pi}{2}}{1 - \sin\frac{\pi}{2}}} = \infty.$$

Aequationes (2) et (3) præterea docent, radium vectorem transgredi non posse limitem a. Si enim in his æquationibus ponitur $r > a$, tum fiunt functiones $\mathfrak{Sin}\,\frac{\varphi}{2}$ et $\mathfrak{Cos}\,\frac{\varphi}{2}$, ideoque ipse angulus φ quantitates imaginariæ. Ex eo autem, quod pro $r = a$ est $\varphi = \infty$, sequitur, ut ne pervenire quidem possit radius vector ad limitem a. — Circulus igitur e vertice anguli variabilis radio a descriptus totam curvam includit, ita quidem, ut sit linea asymptota curvæ.

Ut cursus curvæ accuratius cognosci, ipsaque rectius delineari possit, necesse est, ut pro aliquot valoribus anguli variabilis nota sit longitudo radii vectoris.

Est autem fere	pro $\varphi = \frac{1}{4}\pi$	$r = 0{,}09\,a.$
	» $\varphi = \frac{1}{3}\pi$	$r = 0{,}16\,a.$
	» $\varphi = \frac{1}{2}\pi$	$r = 0{,}34\,a.$
	» $\varphi = \frac{2}{3}\pi$	$r = 0{,}51\,a.$
	» $\varphi = \frac{3}{4}\pi$	$r = 0{,}60\,a.$
	» $\varphi = \pi$	$r = 0{,}79\,a.$
	» $\varphi = \frac{5}{4}\pi$	$r = 0{,}89\,a.$
	» $\varphi = \frac{3}{2}\pi$	$r = 0{,}95\,a.$
	» $\varphi = \frac{7}{4}\pi$	$r = 0{,}97\,a.$
	» $\varphi = 2\pi$	$r = 0{,}99\,a.$

Videmus igitur, curvam una radii vectoris circumversione facta proxime appropinquasse ad circulum includentem, unumque curvæ ramum talem fere habere cursum, qualem ante oculos ponit figura (3).

*) De literis $\mathfrak{L}$ et l cf. Gudermann: Theorie der Potential-Functionen p. 43.

1. De tangente polari.

Novimus formulam: tang $\lambda = \frac{r . d\varphi}{dr}$.

Differentiando æquationem (5) invenimus $\frac{\mathfrak{Sin}\ \varphi\ .\ d\varphi}{dr} = \frac{3a}{(a - r)^2}$, unde substituto pro $\mathfrak{Sin}\ \varphi$ valore ex æquatione (4) sequitur:

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{3a}{(a - r) . \sqrt{3r . (2a + r)}}; \text{ ideoque est}$$

$$\text{tang}\,\lambda = \frac{a}{a - r} . \sqrt{\frac{3r}{2a + r}}, \qquad (7).$$

$$\sin \lambda = a . \sqrt{\frac{3r}{2a^3 + r^3}}, \qquad (8).$$

$$\cos \lambda = (a - r) . \sqrt{\frac{2a + r}{2a^3 + r^3}}. \qquad (9).$$

Hæ æquationes docent, pro $r = 0$ esse $\lambda = 0$, i. e. primam radii vectoris directionem esse tangentem curvæ Pro $r = a$ autem est $\lambda = \frac{\pi}{2}$. Sicut vero radius vector nunquam assequi potest longitudinem a, etiam nunquam fieri potest $\lambda = \frac{\pi}{2}$.

Longitudo tangentis polaris determinanda est ex formula:

$$\text{Tang.} = \frac{r}{\cos \lambda} = \frac{r}{a - r} . \sqrt{\frac{2a^3 + r^3}{2a + r}}. \qquad (10).$$

Ex hac formula sequitur, ut pro $r = 0$ evanescat tangens, pro $r = a$ sit tangens infinite magna, pro $r = \frac{a}{2}$ autem sit Tang. $= \frac{a}{2} . \sqrt{\frac{17}{5}} = 0{,}9219547 \ldots a$.

2. De normali polari.

Longitudo normalis determinatur ex formula:

$$\text{Norm.} = \frac{r}{\sin \lambda} = \frac{\sqrt{r . (2a^3 + r^3)}}{a . \sqrt{3}}. \qquad (11).$$

Hæc formula docet, pro $r = 0$ evanescere normalem; pro $r = a$ esse normalem $= a$; pro $r = \frac{a}{2}$ esse normalem $= \frac{a}{4} . \sqrt{\frac{17}{3}} = 0{,}5951190 \ldots a$.

3. De subtangente polari.

Generatim est: Sbt $= r . \text{tang}\ \lambda$; ergo in hac curva

$$\text{Sbt} = \frac{a . r}{a - r} . \sqrt{\frac{3r}{2a + r}}. \qquad (12).$$

Si in hac formula ponitur $r = 0$, tum evanescit subtangens; pro $r = a$ est subtangens infinite magna; pro $r = \frac{a}{2}$ autem est subtangens $= a \cdot \sqrt{\frac{3}{5}} = 0,7745965 \ldots a$.

4. De subnormali polari.

Longitudo subnormalis computanda est ex formula:

$$\mathrm{Sbn} = \frac{r}{\operatorname{tang} \lambda} = \frac{a - r}{a} \cdot \sqrt{\frac{r \cdot (2a + r)}{3}}, \qquad (13).$$

quæ formula docet, pro $r = 0$ et $r = a$ evanescere subnormalem, pro $r = \frac{a}{2}$ autem esse subnormalem $= \frac{a}{4} \cdot \sqrt{\frac{5}{3}} = 0,3227486 \ldots a$.

Subnormalis igitur necesse est habeat maximam quandam longitudinem. Radius vector autem eius curvæ puncti, cuius subnormalis maxima est, eodem modo determinatus, quo factum est in *Cardioide*, est $r = \frac{a}{2} \cdot (\sqrt{3} - 1)$.

Si constituimus rationem, quæ intercedit inter subtangentem et subnormalem eius puncti, cuius radius vector est $r = \frac{a}{2}$, invenimus, hanc rationem esse $= \frac{12}{5}$. In *Cardioide* hæc ratio erat $= 1$.

5. De radio osculi.

Transferendo formulam, quam pro radio osculi proposuimus p. 18, in hanc curvam invenimus:

$$P = \frac{r \cdot (2a^3 + r^3)^{3/2}}{3a^4 \cdot \sqrt{3r}}. \qquad (14).$$

Hæc formula docet, pro $r = 0$ esse $P = 0$, i. e. in vertice anguli variabilis curvæ ramos efficere *rostrum*. Si vero ponitur $r = a$, tum evadit $P = a$, i. e.: si facimus, ut curva aliquando incurrat in circulum includentem, tum e regione eius puncti, in quo curva in circulum incurreret, curvatura curvæ omnino non foret diversa a curvatura circuli.

6. De evoluta.

Eadem significatione utentes ac in *Cardioide* pro determinandis evolutæ coordinatis has invenimus æquationes:

$$\psi = \operatorname{arc} \cos \left(\frac{a + 2r}{a - r}\right) + \operatorname{arc} \operatorname{tang} \left(\frac{(a - r)(2a^3 + r^3) \cdot \sqrt{2a + r}}{a \cdot (a^3 - r^3) \cdot \sqrt{3r}}\right). \qquad (15).$$

$$\varrho = \sqrt{\frac{r \cdot (2a^3 + r^3)^3 - 9a^5 \cdot r^2 \cdot (a^3 + 2r^3)}{27a^8}}. \qquad (16).$$

7. De rectificatione curvæ.

Si ς significat arcum curvæ, tum est generatim

$$\varsigma = \int \sqrt{dr^2 + r^2 . d\varphi^2}.$$

Erat autem (p. 23) $\frac{d\varphi}{dr} = \frac{3a}{(a - r) . \sqrt{3r\,(2a + r)}}$. Ergo est

$$\varsigma = \int \frac{dr}{a - r} \cdot \frac{2a^3 + r^3}{\sqrt{(2a + r)\,(2a^3 + r^3)}}. \qquad (17).$$

Hæc integratio non solum per functiones cyclicas et hyperbolicas effici non potest, sed ne per functiones quidem modulares, quoniam hoc integrale non redigi potest in formam integralium modularium.

8. De quadratura curvæ.

Nota est formula:

$$\sigma = \int \frac{r^2}{2} \cdot d\varphi.$$

Si in hac formula substituitur valor radii vectoris deductus ex æquatione (5), accipitur

$$\sigma = \frac{a^2}{2} \cdot \int \frac{(\mathfrak{Cos}\;\varphi - 1)^2}{(2 + \mathfrak{Cos}\;\varphi)^2} \cdot d\varphi, \text{ indeque}$$

$$\sigma = \frac{a^2}{2} \cdot \left(\varphi - \frac{3 . \mathfrak{Sin}\;\varphi}{2 + \mathfrak{Cos}\;\varphi}\right). \qquad (18).$$

Quantitas constans non est adiungenda, quia evanescit area evanescente angulo φ.

Hæc formula facile in aliam transformari potest, quæ aream exhibet ut functionem radii vectoris.

Est enim

$$\sigma = \frac{a^2}{2} \cdot \left(\mathfrak{Arc\;Cos}\left(\frac{a + 2r}{a - r}\right) - \frac{\sqrt{3r . (2a + r)}}{a}\right). \qquad (19).$$

Quamquam hæ duæ formulæ satis commodæ sunt atque elegantes, tamen iuvat etiam alia via quamvis longiore ad finem pervenisse. Quare alia ratione per ambages quodammodo curvam quadrabimus. — Est igitur

$$\sigma = \int \frac{r^2}{2} \cdot d\varphi.$$

Erat autem $\frac{d\varphi}{dr} = \frac{a . \sqrt{3}}{(a - r) . \sqrt{r\,(2a + r)}}$; ergo est

$$\sigma = \frac{a . \sqrt{3}}{2} \cdot \int \frac{r^2 . dr}{(a - r) . \sqrt{r\,(2a + r)}}.$$

Jam ponamus $dy = \frac{dr}{(a - r) . \sqrt{r\,(2a + r)}}$; et $\frac{r}{2a + r} = v^2$;

tum est $dy = \frac{2 \,.\, dv}{a \,.\, (1 - 3v^2)} = \frac{2 \,.\, d\,(v \,.\, \sqrt{3})}{a \,.\, \sqrt{3} \,.\, (1 - 3v^2)}$; unde sequitur

$$y = \frac{2}{a \,.\, \sqrt{3}} \cdot \mathfrak{Arc\ Tang}\ (v \,.\, \sqrt{3}) = \frac{2}{a \,.\, \sqrt{3}} \cdot \mathfrak{Arc\ Tang}\left(\sqrt{\frac{3r}{2a + r}}\right).$$

Jam igitur habemus æquationem

$$\sigma = \frac{a \,.\, \sqrt{3}}{2} \cdot \int r^2 \,.\, dy.$$

Ponamus porro $x = \sqrt{\frac{3r}{2a + r}}$; tum est $y = \frac{2}{a \,.\, \sqrt{3}} \cdot \mathfrak{Arc\ Tang}\ (x)$, ideoque

$$\sigma = 4a^2 \,.\, \int \frac{x^4 \,.\, dx}{(1 - x^2)\,(3 - x^2)^2}, \text{ sive}$$

$$\sigma = 4a^2 \,.\, \int \frac{{}^1/_8\, dx}{1 + x} + \frac{{}^1/_8\, dx}{1 - x} - \frac{{}^3/_8\, dx}{(\sqrt{3} + x)^2} - \frac{{}^3/_8\, dx}{(\sqrt{3} - x)^2}; \text{ ideoque}$$

$$\sigma = 4a^2 \,.\, \left({}^1/_8 \log\,(1 + x) - {}^1/_8 \log\,(1 - x) + {}^3/_8 \cdot \frac{1}{\sqrt{3} + x} - {}^3/_8 \cdot \frac{1}{\sqrt{3} - x}\right); \text{ sive}$$

$$\sigma = a^2 \,.\, \left(\log \sqrt{\frac{1 + x}{1 - x}} - \frac{3x}{3 - x^2}\right).$$

Jam vero pro x ponamus valorem: $\sqrt{\frac{3r}{2a + r}}$; tum est:

$$\sigma = a^2 \,.\, \left(\log \sqrt{\frac{1 + \sqrt{\frac{3r}{2a + r}}}{1 - \sqrt{\frac{3r}{2a + r}}}} - \frac{\sqrt{3r\,(2a + r)}}{2a}\right). \quad (20).$$

Facillimum est eruere formulam, quæ aream sectoris exhibeat ut functionem anguli variabilis. Est enim $\sqrt{\frac{3r}{2a + r}} = \mathfrak{Tang}\ \frac{\varphi}{2}$; ergo etiam

$$\sigma = a^2 \,.\, \left(\frac{\varphi}{2} - \frac{3 \,.\, \mathfrak{Tang}\ \frac{\varphi}{2}}{3 - \mathfrak{Tang}^2\ \frac{\varphi}{2}}\right). \quad (21).$$

Hæc autem formula facillime ita transformari potest, ut omnino eadem sit cum formula (18). Est enim: $3 - \mathfrak{Tang}^2\ \frac{\varphi}{2} = 2 + \frac{1}{\mathfrak{Cos}^2\ \frac{\varphi}{2}} = 2 \,.\, \frac{2 + \mathfrak{Cos}\ \varphi}{2 \,.\, \mathfrak{Cos}^2\ \frac{\varphi}{2}}$. Ergo etiam

$$\frac{3\ \mathfrak{Tang}\ \frac{\varphi}{2}}{3 - \mathfrak{Tang}^2\ \frac{\varphi}{2}} = \frac{3 \,.\, 2 \,.\, \mathfrak{Sin}\ \frac{\varphi}{2} \,.\, \mathfrak{Cos}\ \frac{\varphi}{2}}{2 \,.\, (2 + \mathfrak{Cos}\ \varphi)} = \frac{3 \,.\, \mathfrak{Sin}\ \varphi}{2 \,.\, (2 + \mathfrak{Cos}\ \varphi)}.$$

In formulam (21) pro functionibus *hyperbolicis* facile introduci possunt functiones *cyclicæ*. Hoc ita fit, ut ponatur tang $\frac{1}{2}l\varphi$ pro $\mathfrak{Tang}\,\frac{\varphi}{2}$; tum igitur est:

$$\sigma = a^2\left(\frac{\varphi}{2} - \frac{3\,.\,\tang \frac{1}{2}l\varphi}{3 - \tang^2 \frac{1}{2}l\varphi}\right). \qquad (22).$$

Hæ formulæ docent, pro $r = 0$ sive $\varphi = 0$ evanescere aream; pro $r = a$ autem, sive $\varphi = \infty$ aream esse infinitam. Tamen hæc area non est immensa; quin etiam admodum exigua esse potest, dummodo quantitas a satis parva sumatur, quia curva non transgreditur circulum radio a descriptum.

Ut formulis (18), (19), (21), 22) uti possimus, necesse est adhibeamus Gudermanni tabulas logarithmorum functionum hyperbolicarum tabulasque numerorum longitudinalium *).

Si igitur ponimus $r = \frac{a}{2}$, tum est $\mathfrak{Cos}\,\varphi = 4$; ergo $\varphi = 2{,}06343709869$, et $l\varphi = 75^0\ 31'\ 40'', 49$. His datis ex unaquaque formularum (18) (19) (20) (21) (22) computare possumus magnitudinem areæ et invenimus: $\sigma = 0{,}0634727 \ldots a^2$.

Cap. III.

De proprietatibus geometricis curvæ tertiæ.

Aequationem curvæ tertiæ eruimus (p. 13).

$$\operatorname{sn} u = \sqrt{\frac{(2a + b)\, r}{a\,.\,(a + b + r)}} \qquad (1).$$

Hinc facile deducuntur reliquæ functiones argumenti u:

$$\operatorname{cn} u = \sqrt{\frac{(a + b)\,(a - r)}{a\,.\,(a + b + r)}}. \qquad (2).$$

$$\operatorname{tn} u = \sqrt{\frac{(2a + b)\, r}{(a + b)\,(a - r)}}. \qquad (3).$$

$$\operatorname{dn} u = \sqrt{\frac{(a + b)\,(b - r)}{b\,(a + b + r)}}. \qquad (4).$$

Hæ æquationes docent, pro $r = 0$ esse $u = 0$. Ex relatione autem illa (p. 12.): $\varphi = \frac{u}{n}$ sequitur, ut etiam pro $\varphi = 0$ sit $u = 0$. Valores igitur $r = 0$ et $\varphi = 0$ æquationibus curvæ satisfaciunt. Ergo vertex anguli variabilis est punctum curvæ.

Iisdem de causis, quas in *Cardioide* exposuimus, etiam hæc curva ex duobus constat ramis congruentibus.

*) Gudermann: Theorie der Potential-Functionen p. 159 et p. 261.

Si in æquatione (3) ponitur $r = a$, tum fit $\operatorname{tn} u = \infty$; si vero ponitur $r > a$, evadit quantitas imaginaria. Quantitas a igitur summus est valor, quem radius vector assequi potest. Ideo circulus e vertice anguli variabilis descriptus radio a, curvam ita includit, ut rami curvæ in eum incurrant, circumferentiam autem eius non transgrediantur.

Functiones *modulares* eam habent proprietatem, cui similem etiam in functionibus *cyclicis* novimus, ut si $\operatorname{tn} u = \infty$, sit $u = K$ i. e. quadrans modularis. Quoniam vero $\varphi = \frac{u}{n}$ (p. 12), est, si $r = a$, $\varphi = \frac{K}{n}$. Summus igitur valor, quem assequi potest angulus variabilis est $\frac{1}{n}$ quadrantis modularis. Videamus igitur, utrum sit $n < 1$, an $n > 1$.

Si est $n \lessgtr 1$, est etiam $n^2 \lessgtr 1$. Erat autem (p. 12.)

$$n^2 = \tfrac{1}{4} \cdot \frac{b \cdot (2a + b)}{a^2 + ab + b^2}; \text{ ergo}$$

$$1 - n^2 = \frac{4a^2 + 2ab + 3b^2}{a^2 + ab + b^2}.$$

Quantitas $(1 - n^2)$ igitur est affirmativa; ergo est $n < 1$; ideoque $\varphi \left(= \frac{u}{n}\right) > u$. Si vero in universum est $\varphi > u$, etiam summus valor anguli φ maior est, quam quadrans modularis K. Est autem semper quadrans modularis maior, quam quadrans circuli i. e. $K > \frac{\pi}{2}$*); eo magis igitur summus valor anguli φ maior est, quam $\frac{\pi}{2}$. Unus igitur limes, quem summus valor anguli φ ad infra attingere non potest, est quadrans modularis K.

Determinemus etiam alterum limitem.

Supposuimus (p. 12.), ut esset $a < b$; unde sequitur $n > \frac{1}{2}$. Faciamus igitur, ut angulus φ summum, quem potest, valorem sit assecutus. Tum est $u = K$ et $\varphi = \frac{K}{n} = \frac{2K}{2n}$; ideoque, quoniam $2n > 1$, $\varphi < 2K$. Est igitur, si Φ significat summum valorem anguli variabilis,

$$K < \Phi < 2K. \qquad (5).$$

Est autem quadrans modularis functio moduli, qui ipse pendet ex relatione arbitraria, quæ intercedit inter quantitates a et b. Summus valor anguli variabilis igitur est quantitas relativa; ideoque curva ipsa est relativa, pendens ex modulo.

1. De tangente polari.

Nota est formula: $\tan \lambda = \frac{r \cdot d\varphi}{dr}$. Erat autem æquatio differentialis curvæ tertiæ (p. 24.)

---

*) Gudermann: Theorie der Modular-Functionen p. 195.

$$\frac{d\varphi}{dr} = \sqrt{\frac{a^2 + ab + b^2}{r\,(a - r)\,(b - r)\,(a + b + r)}}.$$ Ergo est

$$\operatorname{tang} \lambda = \sqrt{\frac{r\,(a^2 + ab + b^2)}{(a - r)\,(b - r)\,(a + b + r)}}. \qquad (6).$$

Hæc æquatio docet, pro $r = 0$ esse $\lambda = 0$, i. e. curvam in vertice anguli variabilis a prima directione radii vectoris tangi. Si vero ponitur $r = a$, tum evadit $\lambda = \frac{\pi}{2}$; quo significatur, ramos curvæ circulum includentem in iis punctis tangere, in quibus in circulum illum incurrant.

Ex functione tang λ facile deducuntur functiones:

$$\sin \lambda = \sqrt{\frac{r\,(a^2 + ab + b^2)}{r^3 + a^2b + ab^2}}. \qquad (7).$$

$$\cos \lambda = \sqrt{\frac{(a - r)\,(b - r)\,(a + b + r)}{r^3 + a^2b + ab^2}}. \qquad (8).$$

Longitudo tangentis determinatur ex formula: Tang. $= \frac{r}{\cos \lambda}$. Substituto igitur valore pro cos λ ex æquatione (8) oritur

$$\text{Tang.} = r \,.\, \sqrt{\frac{r^3 + a^2b + ab^2}{(a - r)\,(b - r)\,(a + b + r)}}. \qquad (9).$$

Hæc formula docet, evanescere tangentem pro $r = 0$; infinite magnam autem esse eam pro $r = a$.

2. De normali polari.

Longitudo normalis computatur ex formula: Norm. $= \frac{r}{\sin \lambda}$. Substituto igitur valore pro sin λ ex æquatione (7) existit

$$\text{Norm.} = \sqrt{\frac{r \,.\, (r^3 + a^2b + ab^2)}{a^2 + ab + b^2}}. \qquad (10).$$

Docet hæc formula, pro $r = 0$ evanescere normalem; pro $r = a$ autem esse normalem $= a$.

3. De subtangente polari.

Longitudo subtangentis determinatur ex formula: Sbt $= r \,.\, \operatorname{tang} \lambda$. Substituto igitur valore pro tang λ ex æquatione (6) evadit

$$\text{Sbt} = r \,.\, \sqrt{\frac{r \,.\, (a^2 + ab + b^2)}{(a - r)\,(b - r)\,(a + b + r)}}. \qquad (11).$$

Videmus, pro $r = 0$ evanescere subtangentem, pro $r = a$ autem esse subtangentem infinite magnam.

4. De subnormali polari.

Ad computandam subnormalis longitudinem habemus formulam:

$$\mathrm{Sbn} = \frac{r}{\operatorname{tang}\lambda} = \sqrt{\frac{r\,(a-r)\,(b-r)\,(a+b+r)}{a^2+ab+b^2}}. \qquad (12).$$

Ex hac formula sequitur, ut evanescat subnormalis quum pro $r=0$, tum pro $r=a$. Subnormalis igitur necesse est habeat *maximum*. Radius vector autem eius curvæ puncti, cuius subnormalis omnium longissima, simili modo determinatus ac in *Cardioide*, est

$$r = \sqrt[3]{\frac{-\frac{a^2b+ab^2}{4} + \sqrt{\frac{(a^2b+ab^2)^2}{16} - \frac{(a^2+ab+b^2)^3}{54}}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{-\frac{a^2b+ab^2}{4} - \sqrt{\frac{(a^2b+ab^2)^2}{16} - \frac{(a^2+ab+b^2)^3}{54}}}{2}}.$$

5. De radio osculi.

Denotantes, ut etiam supra fecimus, radium osculi per P habemus formulam generalem: $P = \frac{r\,.\,dr}{d\pi}$.

Est autem in hac curva $\pi = r\,.\sin\lambda = \sqrt{\frac{(a^2+ab+b^2)\,.\,r^3}{a^2b+ab^2+r^3}}$. Ergo

$$P = \frac{2r\,.\,(a^2b+ab^2+r^3)^{3/2}}{3\,(a^2b+ab^2)\,.\sqrt{r\,.\,(a^2+ab+b^2)}}. \qquad (13).$$

Si in hac formula ponitur $r=0$, tum est etiam $P=0$, i. e. in vertice anguli variabilis rami curvæ efficiunt *rostrum*. Si vero ponitur $r=a$, oritur

$$P = \frac{2a\,.\,(a^2+ab+b^2)}{3\,.\,(ab+b^2)}.$$

6. De evoluta.

Si in formulis illis pro determinandis evolutæ coordinatis (p. 18) substituuntur valores pro P, sin λ et cos λ, accipimus formulas:

$$\psi = \varphi + \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{2\,(a^2b+ab^2+r^3)\,.\sqrt{(a-r)\,(b-r)\,(a+b+r)}}{(a^2b+ab^2-2r^3)\,.\sqrt{r\,.\,(a^2+ab+b^2)}}\right). \qquad (14).$$

$$\varrho^2 = \frac{4r\,.\,(a^2b+ab^2+r^3)^3 - 3r^2\,.\,(a^2+ab+b^2)\,(a^2b+ab^2)\,(a^2b+ab^2+4r^3)}{9\,(a^2+ab+b^2)\,(a^2b+ab^2)^2}. \qquad (15).$$

7. De rectificatione curvæ.

Nota est formula:

$$s = \int \sqrt{dr^2 + r^2 . d\varphi^2}.$$

Est autem æquatio differentialis huius curvæ:

$$d\varphi = \frac{dr . \sqrt{a^2 + ab + b^2}}{\sqrt{r (a - r) (b - r) (a + b + r)}}; \text{ ergo est}$$

$$s = \int dr . \sqrt{\frac{a^2b + ab^2 + r^3}{(a - r) (b - r) (a + b + r)}}. \qquad (16).$$

Si in hoc integrali, id quod integrationis causa fieri debet, numeratorem facimus rationalem, radicandus denominatoris fit forma *sexti gradus*, altioris igitur, quam ut equidem integrationem ad finem perducere possim.

8. De quadratura curvæ.

Est $\sigma = \int \frac{r^2}{2} . d\varphi$. Erat autem (p. 12) $\varphi = \frac{u}{n} = 2 . \sqrt{\frac{a^2 + ab + b^2}{b (2a + b)}} . u.$

Porro ex æquatione (1) sequitur: $r = \frac{(a^2 + ab) . sn^2 u}{2a + b - a . sn^2 u}$. Ergo est

$$\sigma = (a^2 + ab)^2 . \sqrt{\frac{a^2 + ab + b^2}{b (2a + b)}} . \int \frac{sn^4 u . du}{(2a + b - a . sn^2 u)^2}.$$

Hanc integrationem ut efficere possimus, necesse est, formam integrandam transformemus in seriem infinitam. Est autem:

$$\frac{sn^4 u}{(2a + b - a . sn^2 u)^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{2 (2a + b)}{a^3 . sn^2 u} + \frac{3 (2a + b)^2}{a^4 . sn^4 u} + \frac{4 (2a + b)^3}{a^5 . sn^6 u} + \frac{5 (2a + b)^4}{a^6 . sn^8 u} \cdots\cdots$$

Substituta hac serie, cuius ratio progrediendi in promptu est, existit

$$\sigma = (a^2 + ab)^2 . \sqrt{\frac{a^2 + ab + b^2}{b (2a + b)}} . \int \frac{du}{a^2} + \frac{2(2a + b)}{a^3} . \frac{du}{sn^2 u} + \frac{3 (2a + b)}{a^4} . \frac{du}{sn^4 u} + \frac{4 (2a + b)}{a^5} . \frac{du}{sn^6 u} \cdots$$

Integratio autem singulorum huius seriei terminorum per has duas efficitur formulas:

$$\int sn^2 u . du = \frac{u - el\, u}{k^2} \text{ *)}; \text{ et}$$

$$(n - 1) \cdot \int \frac{du}{sn^n u} = (n - 2) (1 + k^2) \cdot \int \frac{du}{sn^{n-2} u} - (n - 3) \cdot k^2 \cdot \int \frac{du}{sn^{n-4} u} - \frac{cn\, u . dn\, u}{sn^{n-1} u} \text{ **)}.$$

His enim formulis adhibitis invenitur:

$$\int \frac{du}{sn^2 u} = u - el\, u - \frac{dn\, u}{tn\, u}.$$

$$\int \frac{du}{sn^4 u} = \frac{2}{3} (1 + k^2) . \left(u - el\, u - \frac{dn\, u}{tn\, u}\right) - \frac{k^2}{3} . u - \frac{cn\, u . dn\, u}{3 . sn^3 u}.$$

---

*) Gudermann: Theorie der Modular-Functionen p. 129.

**) l. c. p. 144.

Hac ratione quot sufficere videntur, istius seriei integralia derivari possunt.

Supra iam diximus, curvam tertiam esse relativam, pendentem ex modulo, omnesque formulas in capite tertio erutas ad permultas pertinere posse curvas. Pro aliis enim moduli valoribus aliæ oriuntur curvæ.

Ponamus igitur, ut unius saltem harum curvarum cursum cognoscamus, $k = \sqrt{1/2}$; tum est: $b = a.(1 + \sqrt{3})$; $n = 0,5372850$; $K = K' = 1,854074677301$.

Ut inveniamus punctum, in quo curva in circulum includentem incurrit, ponendum est $r = a$; tum autem est $\operatorname{sn} u = 1 = \sin \operatorname{am} u$; ergo $\operatorname{am} u = \frac{\pi}{2}$; ideoque $u = K$; ergo $\varphi = \frac{K}{n} = 3,4508224 = 197^0\ 43'\ 3''$.

Determinemus etiam longitudinem radii vectoris, si est $\varphi = \frac{\pi}{4}$; $\varphi = \frac{\pi}{2}$ et $\varphi = \frac{3\pi}{4}$.

Si est $\varphi = \frac{\pi}{4} = 0,7853982$, tum est $u = n.\varphi = 0,4219826$; ηu *) $= 0,3575090 = 20^0 29'$. Ex formula autem, quam proposuimus (p. 13) sequitur: $\operatorname{am} u = 0,4159621 = 23^0\ 49'\ 58''$.

Ex æquatione (1) autem sequitur: $r = \frac{(2 + \sqrt{3}) . \sin^2 \operatorname{am} u}{3 + \sqrt{3} - \sin^2 \operatorname{am} u} . a$; ergo denique est $r = 0,1333699\ a$.

Si est $\varphi = \frac{\pi}{2}$, tum est $u = 0,8439649$; $\eta u = 0,7150176 = 40^0\ 58'$. $\operatorname{am} u = 0,8008992 = 45^0\ 53'\ 17''$; ideoque $r = 0,4562638\,a$.

Si denique est $\varphi = {}^3/_4\pi$, tum est $u = 1,2659485$; $\eta u = 1,0725274 = 61^0\ 27'$; $\operatorname{am} u = 1,1442013 = 65^0\ 33'\ 28''$; ideoque $r = 0,7924374\,a$.

Unus igitur curvæ ramus fere eum habebit cursum, quem proponit figura (4).

---

*) De litera η cf. Gudermann: Theorie der Modular-Functionen p. 17.

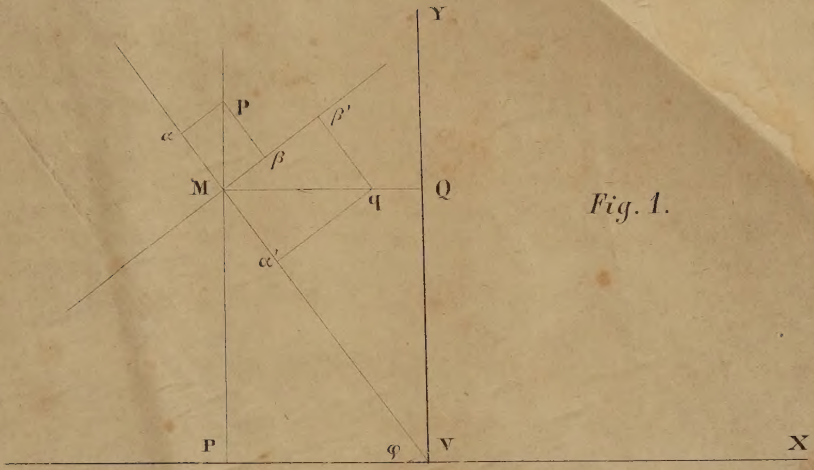


Fig. 1.

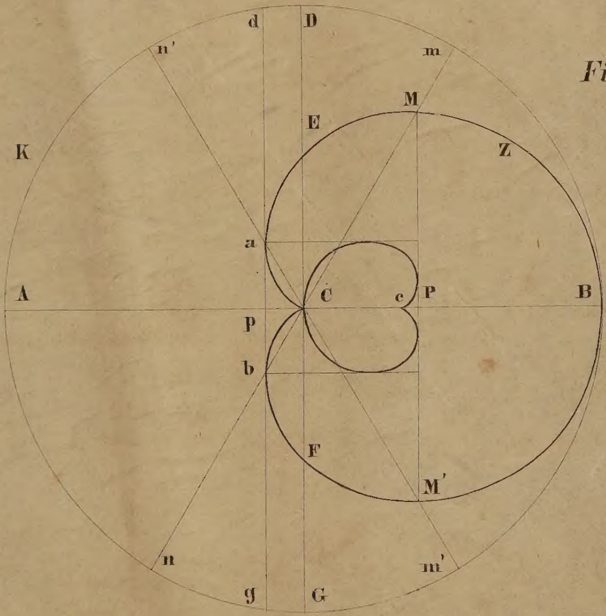
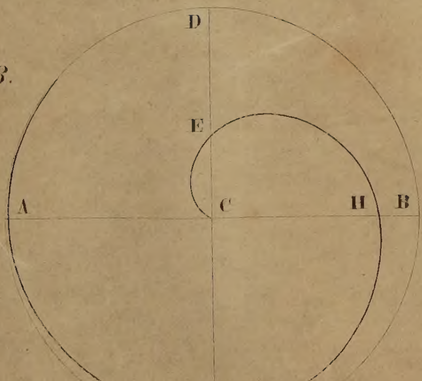


Fig. 2.

Fig. 3.



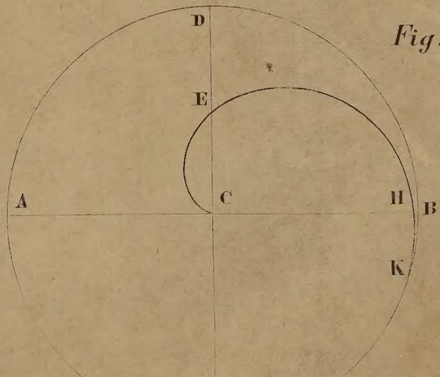


Fig. 4.